

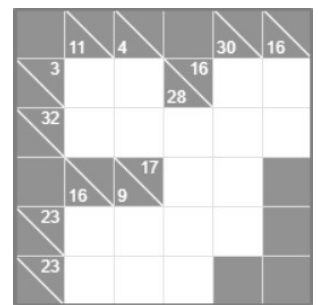
Вступительная олимпиада 2025

Письменная часть. 4 класс

- Постройте отрицания к следующим утверждениям:
 - Саша и Женя – девочки, держащие красный шарик.
 - Каждый говоривший до меня “Я – рыцарь” на самом деле лжец.
- Назовите признаки делимости на 9, 11, 24. Докажите один на свой выбор.
- Из 7 преподавателей нужно составить 2 бригады для судейства по 3 человека. Сколько есть способов это сделать, если в каждой из бригад назначается главный судья, а между бригадами разницы нет? Вычислите и объясните, как вы считали.
- Нарисуйте граф, выполняющий следующие свойства:
 - уникурсальный
 - дерево
 - имеет два простых цикла длины 3
 Если вы считаете, что такой граф нельзя нарисовать – объясните почему.
- В каждом пункте распишите стратегию выигрывающего игрока и почему она работает:
 - В первой кучке лежит 100 конфет, а во второй – 200 конфет. За ход можно взять любое количество конфет из любой кучки. Выигрывает взявший последнюю. Кто выигрывает при правильной игре?
 - На доске написано число 1. Два игрока по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает игрок, который первый запишет на доске число тридцать. Кто выигрывает при правильной игре?

Решите задачи:

- Дедушка дал Пете несколько карточек и попросил составить из них равенство. У Пети получилось вот что: $\boxed{8}\boxed{1} - \boxed{7}\boxed{5} = \boxed{0}\boxed{6}$
 «Мне не нравится это равенство, – сказал дедушка, – ведь в нём число 6 записано как 06, а так писать не принято». Помогите Пете из всех карточек сложить верное равенство, которое устроит дедушку.
- Однажды Геральта укусила виверна. Лекарь велел ему принимать лекарство в течение 180 дней по графику «2 через 1»: два дня приёма перемежаются одним днём отдыха. Геральт начал принимать лекарство в понедельник. Сколько раз он будет его принимать по понедельникам и вторникам подряд?
- Впишите в ячейки цифры от 1 до 9, согласно правилам:
 - Число в правом верхнем углу клетки – сумма чисел в строке справа от него.
 - Число в левом нижнем углу клетки – сумма чисел в столбце снизу от него.
 - Числа в строках и столбцах не повторяются (например, число 8 можно представить как 2+6 или 5+3, комбинацию 4+4 использовать нельзя).



Найдите ошибку в решении.

- Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй – 2, третий – 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

Решение:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \textcircled{30} + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 136$$

Ответ: 8 человек

Вступительная олимпиада 2025

Устная часть. 4 класс

1. Крош ловким движением спрятал шашку Ёжика в карман. В результате черных шашек на доске оказалось в 4 раза больше, чем было белых шашек за несколько ходов до этого. Сколько всего шашек осталось на доске после похищения, если непосредственно перед ним черных шашек было в 5 раз больше, чем белых?



2. Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.)



3. На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.

- В первый день Красный, Зелёный, Чёрный и Фиолетовый выбрали Жёлтого, Синий и Голубой – Зелёного, Жёлтый – Красного, Розовый – Фиолетового. По итогам голосования Жёлтого космонавта выгнали с корабля.
- Во второй день Красный и Чёрный выбрали Голубого, Синий, Зелёный, Розовый и Фиолетовый – Чёрного, Голубой – Фиолетового. В результате Чёрный космонавт был выгнан.
- В третий день Красный, Голубой и Зелёный выбрали Фиолетового, Синий – Красного, Розовый и Фиолетовый – Синего.

Вычислите предателей, если голосуют они одинаково. Объясните, почему предатели – именно они, а не кто-нибудь другой.

4. Однажды 91 участник летнего лагеря решили сходить в кино. Прошлым летом они бы поместились в 8 рядов кинозала (но не в 7). Однако этим летом каждое четвёртое кресло (то есть каждое кресло, номер которого в ряду делится на 4) должно оставаться пустым, поэтому один участник не поместился в кинозале. Сколько рядов в зале и сколько кресел в каждом из них, если во всех рядах поровну мест?
5. В комнате находятся несколько рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждому дали листок бумаги и попросили написать про каждого из остальных, кем он является: лжецом или рыцарем. Когда собрали все листы и произвели подсчёты, то записей «лжец» оказалось 40, а записей «рыцарь» – 32. Сколько в комнате рыцарей, если известно, что их больше, чем лжецов?

Вступительная олимпиада 2025

Письменная часть. 5 класс.

6. В каких задачах используется метод “подсчет двумя способами”?
7. Назовите признаки делимости на 9, 11, 24. Докажите один на свой выбор.
8. В чем заключается метод решения “принцип крайнего”?
9. Нарисуйте граф, выполняющий следующие свойства:
 - уникурсальный
 - несвязный
 - имеет два простых цикла длины 3

Если вы считаете, что такой граф нельзя нарисовать – объясните почему.

10. Из 7 преподавателей нужно составить 2 бригады для судейства по 3 человека. Сколько есть способов это сделать, если в каждой из бригад назначается главный судья, а между бригадами разницы нет? Вычислите и объясните, как вы считали.
11. В каждом пункте распишите стратегию выигрывающего игрока и почему она работает:
 - a. В первой кучке лежит 100 конфет, а во второй – 200 конфет. За ход можно взять любое количество конфет из любой кучки. Выигрывает взявший последнюю. Кто выигрывает при правильной игре?
 - b. На доске написано число 1. Два игрока по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает игрок, который первый запишет на доске число тридцать. Кто выигрывает при правильной игре?

Решите задачи:

1. Если к данному двузначному числу один раз приписать цифру 3 спереди, а другой раз – цифру 8 сзади, то первый результат будет вдвое меньше второго. Найдите это число.
2. Квадраты со сторонами 15 дм и 17 дм пересекаются. После удаления их общей части остались две области. Чему равна разность их площадей?
3. В скачках участвуют три лошади. На одну из них ставки принимают в отношении 1:4 (то есть, если эта лошадь приходит первой, то поставленные на нее деньги возвращают и ещё выдают 4 раза по столько), на другую 1:3, на третью 1:1. (Если лошадь не приходит первой, то деньги, поставленные на нее, не возвращаются). У Коли есть 100 рублей. Может ли он так сделать ставки, чтобы выиграть при любом исходе забега?

Найдите ошибку в решении.

1. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй – 2, третий – 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

Решение:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 & 66 & 78 & 91 & 105 & 120 & 136 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 136 \end{array}$$

Ответ: 8 человек

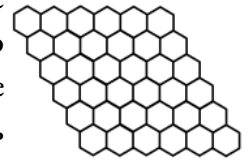
Вступительная олимпиада 2025

Устная часть. 5 класс

1. Крош ловким движением спрятал шашку Ёжика в карман. В результате черных шашек на доске оказалось в 4 раза больше, чем было белых шашек за несколько ходов до этого. Сколько всего шашек осталось на доске после похищения, если непосредственно перед ним черных шашек было в 5 раз больше, чем белых?



2. Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.)



3. В комнате находятся несколько рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждому дали листок бумаги и попросили написать про каждого из остальных, кем он является: лжецом или рыцарем. Когда собрали все листы и произвели подсчёты, то записей «лжец» оказалось 40, а записей «рыцарь» – 32. Сколько в комнате рыцарей, если известно, что их больше, чем лжецов?
4. Натуральные числа от 1 до 2025 выписали в ряд, некоторым образом переставили, а затем от каждого числа отняли номер места, на котором оно стоит. Могли ли все получившиеся разности оказаться нечётными числами?
5. Вере стало интересно, каких трёхзначных чисел больше: тех, у которых сумма цифр 11 или тех, у кого сумма цифр 16. Вера решила, что если все цифры разбить на пары: 4-5, 3-6 и т.д., то каждому числу первого типа будет соответствовать число второго типа, а значит, таких чисел поровну. Например, числу 452 будет соответствовать число 547, а числу 704 – 295. В чём ошиблась Вера и каких чисел больше?

Вступительная олимпиада 2025

Письменная часть. 6 класс

1. В чем заключается решение задачи с использованием метода от противного?
2. Найдите наименьшее натуральное число, третья степень которого кратна числу 588.
3. В чем заключается метод решения задач “обратный ход”?
4. Нарисуйте граф, выполняющий следующие свойства:
 - двудольный
 - несвязный
 - имеет два простых цикла длины 3 и 4 соответственно

Если вы считаете, что такой граф нельзя нарисовать – объясните почему.

5. Из 7 преподавателей нужно составить 2 бригады для судейства по 3 человека. Сколько есть способов это сделать, если в каждой из бригад назначается главный судья, а между бригадами разницы нет? Вычислите и объясните, как вы считали.

Решите задачи:

1. Три тракторные бригады вместе вспахали поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахали бы за 6 дней, а первая и третья вместе – за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за три дня третьей бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за два дня второй бригадой?
2. Квадраты со сторонами 15 дм и 17 дм пересекаются. После удаления их общей части остались две области. Чему равна разность их площадей?
3. x и y – целые числа, такие, что $3x + 7y$ делится на 19. Докажите, что $43x + 75y$ тоже делится на 19.

Найдите ошибку в решении:

1. Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше – сумму этих цифр. Между мальчиками состоялся такой диалог: Петя: «Я угадаю задуманное число с трёх попыток, но двух мне может не хватить». Саша: «Если так, то мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить». Какое число было сообщено Саше?

Ответ: 10. Решение: Пусть $\overline{ab}$ – задуманное двузначное число, тогда $P = a \cdot b$ – произведение его цифр. Так как Петя берётся угадать задуманное число с трёх попыток, то число P должно раскладываться на два множителя, которые являются цифрами, ровно тремя способами, учитывая порядок множителей. Следовательно:

- 1) $b \neq 0$ (иначе $P = 0 = a \cdot 0$ при любом a от 1 до 9, то есть указанных способов – девять);
- 2) для чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ значение P одно и то же, поэтому P должно быть квадратом какой-то из цифр (иначе P раскладывается указанным образом четным количеством способов).

Таким образом, достаточно рассмотреть квадраты всех цифр и выписать все способы их указанного разложения на множители: $1 = 1 \cdot 1$; $4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 = 4 \cdot 1$; $9 = 3 \cdot 3 = 1 \cdot 9 = 9 \cdot 1$; $16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8 = 8 \cdot 2$; $25 = 5 \cdot 5$; $36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 9 \cdot 4$; $49 = 7 \cdot 7$; $64 = 7 \cdot 7$; $81 = 9 \cdot 9$. Следовательно, из фразы Пети Саша может сделать вывод, что задуманным могло оказаться только одно из следующих чисел: 22, 14, 41, 33, 19, 91, 44, 28, 82, 66, 49, 94.

Среди них: одно число с суммой цифр 4 (22), два числа с суммой цифр 5 (14 и 41), одно число с суммой цифр 6 (33), одно число с суммой цифр 8 (44), четыре числа с суммой цифр 10 (19, 91, 28, 82), одно число с суммой цифр 12 (66) и два числа с суммой цифр 13 (49 и 94). Так как Саше требуется 4 попытки на угадывание суммы, то искомая сумма равна 10.

Вступительная олимпиада 2025

Устная олимпиада. 6 класс

1. Нюша написала на доске числа от 1 до 100. Каждую минуту Крош выбирает 50 чисел и прибавляет к ним 1, а Ёжик вычитает 1 из оставшихся 50 чисел. Могут ли Крош и Ёжик сделать так, чтобы на доске появилось три группы чисел: в первой 40 равных чисел, во второй 40 равных чисел и в третьей 20 равных чисел?
2. Из натуральных чисел от 1 до 100 выбрано 50 различных. Оказалось, что сумма никаких двух из них не равна 100. Верно ли, что среди выбранных чисел всегда найдется квадрат какого-нибудь целого числа?
3. Вере стало интересно, каких трёхзначных чисел больше: тех, у которых сумма цифр 11 или тех, у кого сумма цифр 16. Вера решила, что если все цифры разбить на пары: 4-5, 3-6 и т.д., то каждому числу первого типа будет соответствовать число второго типа, а значит, таких чисел поровну. Например, числу 452 будет соответствовать число 547, а числу 704 – 295. В чём ошиблась Вера и каких чисел больше?
4. В стране 17 городов. Некоторые города соединены друг с другом прямой дорогой. Из каждого можно попасть напрямую хотя бы в 8 городов. Докажите, что из любого города можно попасть в любой не более чем с одной пересадкой.
5. Как известно, у марсиан может быть 3 или 4 глаза, 3 или 4 руки и 3 или 4 ноги. Однажды на празднике собралось 22 марсианина. Ровно у 20 было по 3 глаза, ровно у 10 было 3 ноги и ровно у 15 было по 3 руки. Кроме этого, если у марсианина 3 глаза, то у него ещё чего-то 3. Ровно у 3 марсиан было и 3 ноги, и 3 руки. У скольких марсиан всего по 4?

Вступительная олимпиада 2025

Письменная часть. 7 класс

1. В чем заключается решение задачи типа “оценка+пример”?
2. Найдите наименьшее натуральное число, третья степень которого кратна числу 588.
3. В чем заключается решение задачи с использованием метода от противного?
4. Нарисуйте граф, выполняющий следующие свойства:
 - двудольный
 - уникурсальный
 - дерево
 - имеет хотя бы 5 ребер

Если вы считаете, что такой граф нельзя нарисовать – объясните почему.

5. Из 7 преподавателей нужно составить 2 бригады для судейства по 3 человека. Сколько есть способов это сделать, если в каждой из бригад назначается главный судья, а между бригадами разницы нет? Вычислите и объясните, как вы считали.

Упростите выражение:

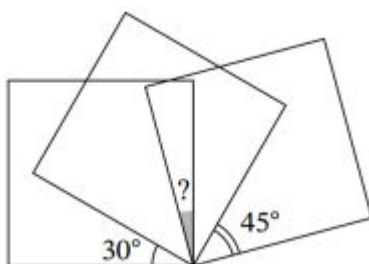
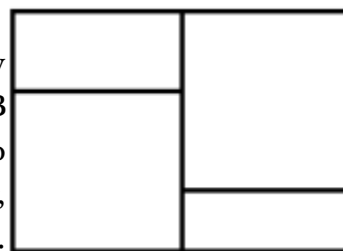
1. $4a \cdot (6a - 3b) - 21a \cdot (4b - 3a)$
2. $(5a - 3b)^3 - 2a \cdot (4b - 5a) \cdot (3b + 8)$

Решите системы уравнений:

1.
$$\begin{cases} 5x + 3y = 13 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 32y + 15x - 156 = 160x - 94y + 32 \\ 5x - 73 + 8y = 14y - 71 - 3x \end{cases}$$

Решите задачи:

1. Три тракторные бригады вместе вспахали поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахали бы за 6 дней, а первая и третья вместе – за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за три дня третьей бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за два дня второй бригадой?
2. В стекольной мастерской сделали необычное окно. Оно имеет форму прямоугольника, разделённого по вертикали на две равных части. В каждой половинке есть форточка: в левой – сверху, площадью в шестую часть от всего окна и периметром 92 сантиметра; в правой – снизу, площадью в восьмую часть всего окна и периметром 84 сантиметра. Чему равны периметры всего окна и остальных кусков стекла?
3. На рисунке изображены три квадрата. Найдите отмеченный угол, если известны два других угла на рисунке.



Вступительная олимпиада 2025

Устная часть. 7 класс.

1. Докажите, что числа a^2 и b^2 дают одинаковые остатки при делении на $a - b$, если a и b – положительные целые числа, и $a > b$.
2. На окружности отмечено 2000 синих и одна красная точка. Рассматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше – тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?
3. Из натуральных чисел от 1 до 100 выбрано 50 различных. Оказалось, что сумма никаких двух из них не равна 100. Верно ли, что среди выбранных чисел всегда найдется квадрат какого-нибудь целого числа?
4. В стране 17 городов. Некоторые города соединены друг с другом прямой дорогой. Из каждого можно попасть напрямую хотя бы в 8 городов. Докажите, что из любого города можно попасть в любой не более чем с одной пересадкой.
5. Баба-Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги в 13 раз больше, чем на мухоморах Кощея, но после того, как Баба-Яга отдала Кощею свой мухомор с наименьшим числом крапинок, на её мухоморах стало крапинок только в 8 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что в начале у Бабы-Яги было не более 23 мухоморов.