

Вступительная олимпиада 2024

Письменная часть

4 класс

1. Постройте отрицания к следующим утверждениям:
 - а. Каждый из стоящих в круге заявил: «Точно напротив меня стоит лжец или хитрец».
 - б. Оля и Яна выиграли у всех, чьи имена длиннее, чем у них.
 - в. У Шуры и Пети вместе конфет на 44 штуки больше, чем у Кати.
2. Сколько существует чисел меньше 300, в которых нет нулей, и сумма их цифр равна шести?
3. Является ли число 351900 полным квадратом? (Полный квадрат - число, являющееся второй степенью некоторого целого числа).
4. Что такое разложить на простые множители? Что такое простой множитель?
5. Какие свойства сочетаний вы знаете? Перечислите все и докажите одно по вашему выбору.
6. Известны степени вершин. Постройте граф.



7. В каждом пункте распишите стратегию выигрывающего игрока и почему она работает:
 - а. На столе лежит 41 спичка, за ход можно брать от 3 до 6. Играют двое. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
 - б. На доску 11x11 двое по очереди выставляют шашки. Кто не сможет сделать ход - проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

Решите задачи:

1. Рамина и ее помощница вышли вместе собирать зерна. Обычная мышь собирает 144 зернышка за 12 минут, а королева полевых мышей Рамина собирает такое же количество зерен за 9 минут. За какое время Рамина и ее помощница могут собрать 1120 зерен, если будут работать одновременно?
2. Знамя Орков представляет собой кусок черной материи площадью 200 см^2 . На него с нахлестом нашиты красный и белый дракон. Причем площадь красного дракона 84 см^2 , а та его часть, которая не скрыта белым драконом, 58 см^2 . Голая черная ткань составляет 68 см^2 . Какова площадь белого дракона?
3. В клетках таблицы 4×4 расставлены числа 1, 2, 3, 4 так, что каждое из чисел встречается в каждой строке и в каждом столбце; во всех четырех частях, изображенных на рисунке, суммы чисел равны. Расставьте оставшиеся числа.

	1		
4			

Найдите ошибку в решении.

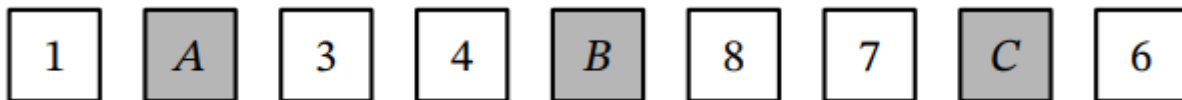
1. Найдите наименьшее число, у которого все цифры различны, а сумма всех цифр равна 32.

Решение: Число тем меньше, чем меньше его первая цифра. Самая маленькая цифра - это 1. Тогда потребуются хотя бы 5 слагаемых: $9 + 8 + 7 + 6 = 30 < 31$. Тогда самое маленькое число будет 125789.

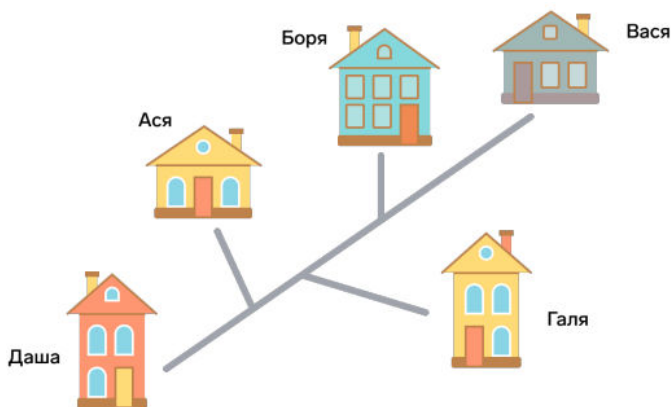
Вступительная олимпиада 2024

Устная часть. 4 класс

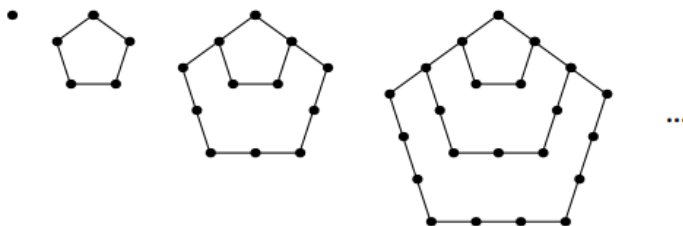
1. На девяти карточках написаны числа от 1 до 9 (каждое — по одному разу). Эти карточки выложили в ряд так, что нет трёх подряд лежащих карточек, на которых числа идут по возрастанию, а также нет трёх подряд лежащих карточек, на которых числа идут по убыванию. Затем три карточки перевернули числом вниз, как показано на рисунке. Какие числа на них написаны?



2. На рисунке изображена схема дорог между домами пяти ребят. От Аси до Гали кратчайшее расстояние по дорогам 12 км, от Гали до Бори — 10 км, от Аси до Бори — 8 км, от Даши до Гали — 15 км, от Васи до Гали — 17 км. Сколько километров составляет кратчайшее расстояние по дорогам от Даши до Васи?



3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 65 жителей острова собрались на заседание. Все они по очереди сделали заявление: «Среди сделанных ранее заявлений истинных ровно на 20 меньше, чем ложных». Сколько рыцарей было на этом заседании?
4. Аня расставляет камешки на песке. Сначала она поставила один камень, потом добавила камешки, чтобы получился пятиугольник, затем сделала из камешков внешний большой пятиугольник, после этого ещё один внешний пятиугольник и т. д., как на рисунке. Количество камней, которые у неё были расставлены на первых четырёх картинках: 1, 5, 12 и 22. Если продолжать составлять такие картинки дальше, то сколько камней будет на 10-й картинке?



5. В журнале «Суперкиборги» есть 4 выпуска. К первому выпуску прилагаются голова и туловище робота, ко второму — туловище, руки и ноги, к третьему — руки и голова, к четвертому — голова и ноги. Какое наименьшее количество журналов нужно купить Денису, если он хочет собрать армию из десяти таких роботов?

Вступительная олимпиада 2024

Письменная часть. 5 класс.

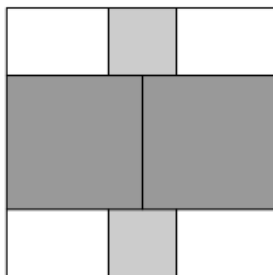
1. В чем заключается решение задачи типа “оценка+пример”?
2. Назовите признаки делимости на 16, 11, 15. Докажите один на свой выбор.
3. В чем заключается метод решения “от противного”?
4. На День учителя благодарные ученики подарили Егору Сергеевичу несколько железнодорожных билетов, чтобы он совершил путешествие по России. Билеты были для проезда между следующими парами городов:
 - Санкт-Петербург и Тверь
 - Ярославль и Нижний Новгород
 - Москва и Тверь
 - Москва и Казань
 - Нижний Новгород и Казань
 - Москва и Нижний Новгород

Билеты были с открытой датой: по каждому билету можно проехать один раз в любую сторону между городами. Егор Сергеевич в итоге смог побывать ровно по одному разу в шести городах. В каком городе могло начаться путешествие? Укажите все возможные варианты.

5. Количество сочетаний - количество способов выбрать k элементов из n без повторений без учета порядка. Объясните, что значат условия в этом предложении. Напишите формулу количества сочетаний и объясните, почему она такая.
6. В каждом пункте распишите стратегию выигрывающего игрока и почему она работает:
 - a. На доске написано число 23328. Двое по очереди делят его на 2 или 3, пока результат получается целым. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
 - b. В левой клетке полоски 1×405 стоит фишка. Двое по очереди двигают ее на 3, 4, 5 или 6 клеток вправо. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Решите задачи:

1. Пять последовательных натуральных чисел написаны в ряд. Сумма трёх самых маленьких из них равна 60. Чему равна сумма трёх самых больших?
2. Крест, состоящий из двух одинаковых больших и двух одинаковых маленьких квадратов, поместили внутри ещё большего квадрата. Вычислите в сантиметрах сторону самого большого квадрата, если площадь креста – 810 см^2 .



Найдите ошибку в решении.

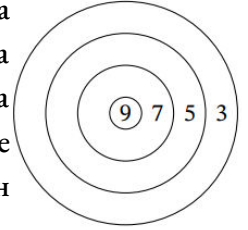
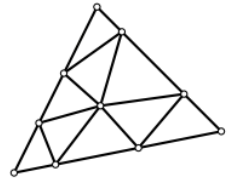
1. На кружки по математике записалось несколько школьников. Их хотят распределить по группам равномерно — таким образом, чтобы количество учеников в любых двух группах отличалось не более чем на 1. В результате такого равномерного деления получилось 6 групп, среди которых ровно 4 группы по 13 учеников. Сколько всего могло быть школьников?

Ответ: 76. **Решение.** Так как количество учеников в группах отличается не более, чем на 1, то в оставшихся двух группах 12 учеников. Значит, общее количество учеников равно $13 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 76$.

Вступительная олимпиада 2024

Устная часть. 5 класс

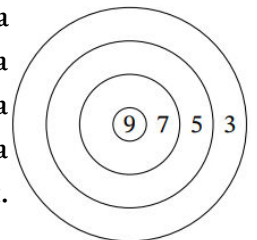
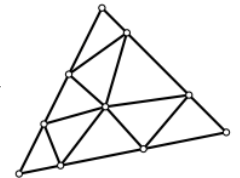
1. Внутри большого треугольника периметра 120 провели несколько отрезков, которые разделили его на девять меньших треугольников, как показано на рисунке. Оказалось, что периметры всех девяти маленьких треугольников равны между собой. Чему они могут быть равны? Укажите все возможные варианты.
2. Миша летом на даче изготовил себе самодельный дартс. Круглая доска разделена окружностями на несколько секторов — в неё можно кидать дротики. За попадание даётся столько очков, сколько написано в секторе, как указано на рисунке. Миша кидал 3 раза по 8 дротиков. Во второй раз он выбил в 2 раза больше очков, чем в первый, а в третий раз в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько он выбил очков во второй раз?
3. У компании гномов 97 драгоценных камней на всех, причем у каждого двух гномов вместе не больше 9 драгоценных камней. Какое наименьшее число гномов может быть в этой компании, если каждым камнем владеет ровно один гном?
4. В волшебной стране живут маленькие человечки - жевуны. У мальчиков жевунов по 5 бубенчиков на одежде, у девочек по 7 бубенчиков, у взрослых - 8. На прогулку вышли 12 жевунов, у которых оказалось вместе 77 бубенчиков. Сколько было мальчиков и девочек среди жевунов? Найдите все варианты ответа.
5. Имеется 39 монет. Требуется разложить эти монеты по клеткам квадратной доски $n \times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1 (в клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще). При каком максимальном n это возможно?



Вступительная олимпиада 2024

Устная часть. 5 класс

1. Внутри большого треугольника периметра 120 провели несколько отрезков, которые разделили его на девять меньших треугольников, как показано на рисунке. Оказалось, что периметры всех девяти маленьких треугольников равны между собой. Чему они могут быть равны? Укажите все возможные варианты.
2. Миша летом на даче изготовил себе самодельный дартс. Круглая доска разделена окружностями на несколько секторов — в неё можно кидать дротики. За попадание даётся столько очков, сколько написано в секторе, как указано на рисунке. Миша кидал 3 раза по 8 дротиков. Во второй раз он выбил в 2 раза больше очков, чем в первый, а в третий раз в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько он выбил очков во второй раз?
3. У компании гномов 97 драгоценных камней на всех, причем у каждого двух гномов вместе не больше 9 драгоценных камней. Какое наименьшее число гномов может быть в этой компании, если каждым камнем владеет ровно один гном?
4. В волшебной стране живут маленькие человечки - жевуны. У мальчиков жевунов по 5 бубенчиков на одежде, у девочек по 7 бубенчиков, у взрослых - 8. На прогулку вышли 12 жевунов, у которых оказалось вместе 77 бубенчиков. Сколько было мальчиков и девочек среди жевунов? Найдите все варианты ответа.
5. Имеется 39 монет. Требуется разложить эти монеты по клеткам квадратной доски $n \times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1 (в клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще). При каком максимальном n это возможно?



Вступительная олимпиада 2024

Письменная часть. 6 класс

1. В чем заключается решение задачи с использованием метода математической индукции?
2. Приведите пример числа, которое имеет остаток 4 при делении на 18, и остаток 35 при делении на 42. Если вы считаете, что такое невозможно - поясните почему.
3. В чем заключается метод решения задач на инвариант?
4. Что такое дерево? Что такое изолированная вершина? Как звучит необходимое условие уникальности? Что такое двудольный граф?
5. Количество размещений - количество способов выбрать k элементов из n без повторов и с учетом порядка. Объясните, что значат условия в этом предложении.
6. Что такое перестановки с повторениями? Напишите формулу перестановок с повторениями и объясните, почему она такая.

Решите задачи:

1. Саша и Ваня играют в игру. Саша задаёт Ване вопросы. Если Ваня отвечает на вопрос правильно, то Саша даёт ему 7 конфет. Если же Ваня отвечает неправильно, то он даёт Саше 3 конфеты. После того, как Саша задал 50 вопросов, оказалось, что у каждого из них столько же конфет, сколько было в начале. На сколько вопросов Ваня ответил правильно?
2. Девять голодных пионеров за час набирают корзину клубники и наедаются досыта. Сытые пионерки клубнику не едят, поэтому набирают корзину за час шестером. Сколько голодных пионеров можно накормить досыта корзиной клубники?
3. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?

Найдите ошибку в решении:

1. Вася выписал все числа, произведение цифр которых равно 2016. Вова выбрал наименьшее из них. Какое число выбрал Вова?

Решение. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. 7 обязана остаться цифрой. Меньше 3х цифр из оставшегося не получится - в цифру влезает не более 3х делителей. Тогда единственный четырехзначный набор это 7, 4, 8, 9, из которого наименьшее число - 4789.

Вступительная олимпиада 2024

Устная олимпиада. 6 класс

1. В клетках квадрата расставили числа так, что суммы чисел в каждой вертикали, горизонтали и каждой диагонали из трёх клеток равны. Затем некоторые числа скрыли. Чему равна сумма чисел в двух закрашенных клетках?
2. Коля отметил на числовой прямой несколько точек красным цветом. Сумма координат всех красных точек равна 2124, причём у двух крайних сумма равна 200. Затем Саша отметил синим цветом середину каждого отрезка, соединяющего две соседние красные точки. Найдите сумму координат синих точек.
3. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?
4. Числа от 1 до 200 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы. Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 99 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 99 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 113?
5. В каждую комнату отеля можно поселить не более 3 человек. Менеджер отеля знает, что скоро приедет группа из 100 футбольных фанатов, которые болеют за три разные команды. В одну комнату можно поселить только мужчин или только женщин; также нельзя вместе поселить фанатов разных команд. Сколько комнат нужно забронировать, чтобы точно расселить всех фанатов?

16		
		10
8		12

Вступительная олимпиада 2024

Устная олимпиада. 6 класс

1. В клетках квадрата расставили числа так, что суммы чисел в каждой вертикали, горизонтали и каждой диагонали из трёх клеток равны. Затем некоторые числа скрыли. Чему равна сумма чисел в двух закрашенных клетках?
2. Коля отметил на числовой прямой несколько точек красным цветом. Сумма координат всех красных точек равна 2124, причём у двух крайних сумма равна 200. Затем Саша отметил синим цветом середину каждого отрезка, соединяющего две соседние красные точки. Найдите сумму координат синих точек.
3. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?
4. Числа от 1 до 200 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы. Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 99 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 99 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 113?
5. В каждую комнату отеля можно поселить не более 3 человек. Менеджер отеля знает, что скоро приедет группа из 100 футбольных фанатов, которые болеют за три разные команды. В одну комнату можно поселить только мужчин или только женщин; также нельзя вместе поселить фанатов разных команд. Сколько комнат нужно забронировать, чтобы точно расселить всех фанатов?

16		
		10
8		12

Вступительная олимпиада 2024

Письменная часть. 7 класс

1. В чем заключается решение задачи с использованием метода математической индукции?
2. Приведите пример числа, которое имеет остаток 4 при делении на 18, и остаток 35 при делении на 42. Если вы считаете, что такое невозможно - поясните почему.
3. В чем заключается метод решения задач на инвариант?
4. Что такое дерево? Что такое изолированная вершина? Как звучит необходимое условие уникальности? Что такое двудольный граф?
5. Количество размещений - количество способов выбрать k элементов из n без повторений и с учетом порядка. Объясните, что значат условия в этом предложении.
6. Что такое перестановки с повторениями? Напишите формулу перестановок с повторениями и объясните, почему она такая.

Упростите выражение:

1. $5a \cdot (4a - 7b) - 11a \cdot (5b - 7a)$
2. $(3a - 2b)^3 - a \cdot (6b - 3a) \cdot (2b + 6)$

Решите системы уравнений:

1.
$$\begin{cases} 5x + 3y = 13 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 42x - 12y = 36x + 5y + 6 \\ 3x + 24 = 7y - 18 \end{cases}$$

Решите задачи:

1. Саша и Ваня играют в игру. Саша задаёт Ване вопросы. Если Ваня отвечает на вопрос правильно, то Саша даёт ему 7 конфет. Если же Ваня отвечает неправильно, то он даёт Саше 3 конфеты. После того, как Саша задал 50 вопросов, оказалось, что у каждого из них столько же конфет, сколько было в начале. На сколько вопросов Ваня ответил правильно?
2. Девять голодных пионерок за час набирают корзину клубники и наедаются досыта. Сытые пионерки клубнику не едят, поэтому набирают корзину за час вшестером. Сколько голодных пионерок можно накормить досыта корзиной клубники?
3. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?

Найдите ошибку в решении:

1. Вася выписал все числа, произведение цифр которых равно 2016. Вова выбрал наименьшее из них. Какое число выбрал Вова?

Решение. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. 7 обязана остаться цифрой. Меньше 3х цифр из оставшегося не получится - в цифру влезает не более 3х делителей. Тогда единственный четырехзначный набор это 7, 4, 8, 9, из которого наименьшее число - 4789.

Вступительная олимпиада 2024

Устная часть. 7 класс.

1. В клетках квадрата расставили числа так, что суммы чисел в каждой вертикали, горизонтали и каждой диагонали из трёх клеток равны. Затем некоторые числа скрыли. Чему равна сумма чисел в двух закрашенных клетках?

16		
		10
8		12
2. Коля отметил на числовой прямой несколько точек красным цветом. Сумма координат всех красных точек равна 2124, причём у двух крайних сумма равна 200. Затем Саша отметил синим цветом середину каждого отрезка, соединяющего две соседние красные точки. Найдите сумму координат синих точек.
3. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?
4. В треугольнике ABC угол C равен 60° . На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что $AC + CD = BC$. Докажите, что треугольник ABD равнобедренный.
5. Числа от 1 до 200 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы. Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 99 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 99 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 113?
6. В каждую комнату отеля можно поселить не более 3 человек. Менеджер отеля знает, что скоро приедет группа из 100 футбольных фанатов, которые болеют за три разные команды. В одну комнату можно селить только мужчин или только женщин; также нельзя вместе селить фанатов разных команд. Сколько комнат нужно забронировать, чтобы точно расселить всех фанатов?

Вступительная олимпиада 2024

Устная часть. 7 класс.

1. В клетках квадрата расставили числа так, что суммы чисел в каждой вертикали, горизонтали и каждой диагонали из трёх клеток равны. Затем некоторые числа скрыли. Чему равна сумма чисел в двух закрашенных клетках?

16		
		10
8		12
2. Коля отметил на числовой прямой несколько точек красным цветом. Сумма координат всех красных точек равна 2124, причём у двух крайних сумма равна 200. Затем Саша отметил синим цветом середину каждого отрезка, соединяющего две соседние красные точки. Найдите сумму координат синих точек.
3. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?
4. В треугольнике ABC угол C равен 60° . На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что $AC + CD = BC$. Докажите, что треугольник ABD равнобедренный.
5. Числа от 1 до 200 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы. Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 99 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 99 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 113?
6. В каждую комнату отеля можно поселить не более 3 человек. Менеджер отеля знает, что скоро приедет группа из 100 футбольных фанатов, которые болеют за три разные команды. В одну комнату можно селить только мужчин или только женщин; также нельзя вместе селить фанатов разных команд. Сколько комнат нужно забронировать, чтобы точно расселить всех фанатов?