Вступительная олимпиада 2023

Письменная часть. 7 класс

1. В чем заключается решение задачи с использованием принципа Дирихле?
2. В каждом пункте распишите стратегию выигрывающего игрока:
    a. На доске 5x5 двое поочередно отмечают клетки так, чтобы отмечаемая клетка не касалась даже в точке только что отмеченной. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
    b. В левой клетке полоски 1x25 стоит фишка. Двое по очереди двигают ее на 2 или 4 клетки вправо. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Что такое степень вершины? Что такое мост? В дереве есть висячая вершина (с доказательством).
4. Количество перестановок - количество способов выбрать k элементов из k без повторений и с учетом порядка. Объясните, что значат условия в этом предложении.
5. Что такое сочетания с повторениями? Напишите формулу сочетания с повторениями и объясните, почему она такая.
6. Сформулируйте бином Ньютона.
7. Что такое прямоугольный треугольник? Какие свойства прямоугольного треугольника вы знаете?
8. Приведите пример числа, которое имеет остаток 3 при делении на 7, и остаток 12 при делении на 21. Если вы считаете, что такое невозможно - поясните почему.

Упростите выражение:

1. $9a \cdot (6a - 5b) - 13a \cdot (6b - 3a)$
2. $(7a - 4b)^2 - (3b - 5a) \cdot (b + 8)$

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 7x + y = 44 \\ 3y - 4x = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x - 8y + 2x = 16y - 27 - 4x \\ 8x + 7y = (2y - 5)x + 11 \end{cases}$

Решите задачи:

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что CD = AC – AB. Точка M — середина AD. Докажите, что угол BMC — тупой.
2. Буфетчик делает молочно-вишнёвый коктейль, смешивая в миксере молоко и вишнёвый сок. Молоко стоит 20 рублей за литр, а вишнёвый сок — 30 рублей за литр. Известно, что стоимость молока, заливаемого в миксер, равна стоимости сока, заливаемого в миксер. Сколько стоит литр молочно-вишнёвого коктейля?

Найдите ошибку в решении:

1. В турнире по шашкам участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?

Решение. Пусть в турнире приняло участие x десятиклассников, которые заработали y очков. Тогда играли $10x$ одиннадцатиклассников, которые заработали $4.5y$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11x$ игроков играют $\frac{11x(11x-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение $11x(11x - 1) = 5.5y$, откуда $y = 2x(11x - 1)$. Заметим, что каждый участник играет $(11x - 1)$ партий. Значит, каждый десятиклассник может набрать максимум $2(11x - 1)$ очков, если выиграет все игры. Так как x десятиклассников набрали $2x(11x - 1)$, они выиграли все свои игры. Т.к. у всех поровну очков, то самый успешный десятиклассник имеет результат $2(11x - 1)$ очков.

Вступительная олимпиада 2023

Устная часть. 7 класс.

1. На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.
2. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рис. слева). Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, не обязательно положительное. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

3. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?
4. Существуют ли различные натуральные числа x, y, z, для которых $x + \text{НОД}(y, z) = y + \text{НОД}(z, x) = z + \text{НОД}(x, y)$?
5. На доске записано число 2023^{2011}. Каждым ходом последняя цифра записанного на доске числа запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли после применения нескольких таких операций получится число 2011^{10}?

Вступительная олимпиада 2023

Устная часть. 7 класс.

1. На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.
2. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рис. слева). Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, не обязательно положительное. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

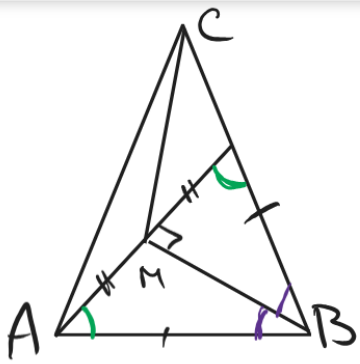
2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

3. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?
4. Существуют ли различные натуральные числа x, y, z, для которых $x + \text{НОД}(y, z) = y + \text{НОД}(z, x) = z + \text{НОД}(x, y)$?
5. На доске записано число 2023^{2011}. Каждым ходом последняя цифра записанного на доске числа запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли после применения нескольких таких операций получится число 2011^{10}?

Вступительная олимпиада 2023
Письменная часть. 7 класс. Разбор

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что CD = AC – AB. Точка M — середина AD. Докажите, что угол BMC — тупой.



2. Буфетчик делает молочно-вишнёвый коктейль, смешивая в миксере молоко и вишнёвый сок. Молоко стоит 20 рублей за литр, а вишнёвый сок — 30 рублей за литр. Известно, что стоимость молока, заливаемого в миксер, равна стоимости сока, заливаемого в миксер. Сколько стоит литр молочно-вишнёвого коктейля?

Решение. Из отношения стоимостей, молока добавляют 3 часть, а вишневого сока - 2 части. Тогда 5 литров смеси стоят 20x3+30x2=120 рублей, а литр, соответственно, 24 рубля.

1. В турнире по шашкам участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?

Ответ. 20. **Решение.**

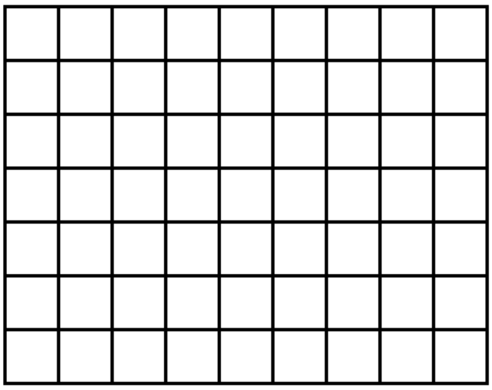
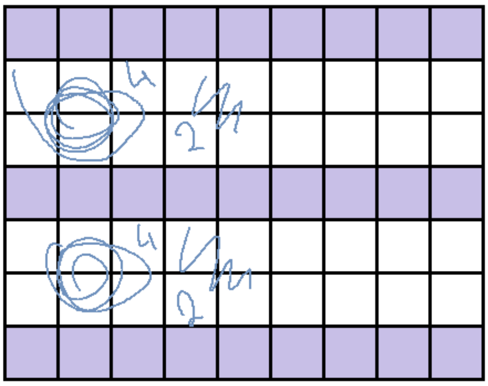
1. Пусть в турнире приняло участие x десятиклассников, которые заработали y очков. Тогда играли $10x$ одиннадцатиклассников, которые заработали $4.5y$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11x$ игроков играют $\frac{11x(11x-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение $11x(11x - 1) = 5.5y$, откуда $y = 2x(11x - 1)$.

2. Заметим, что каждый участник играет $(11x - 1)$ партий. Значит, каждый десятиклассник может набрать максимум $2(11x - 1)$ очков, если выиграет все игры. Так как x десятиклассников набрали $2x(11x - 1)$, они выиграли все свои игры.

3. Если в турнире участвовало хотя бы два десятиклассника, то в игре между собой один из них не выиграл. Это невозможно. Значит, был только один десятиклассник, т. е. $x = 1$. Он набрал $2(11 - 1) = 20$ очков.

Устная часть. Разбор.

1. На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.

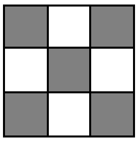
Решение: Нельзя. Заметим, что из-за 3x3 в фиолетовых линиях не может стоять ничего. Рассмотрим “центральный” квадрат 5x5 - в нем должно стоять хотя бы 12 крестиков, а значит пустых будет не более 13.

2. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рис. слева). Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, не обязательно положительное. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

Решение: Раскрасим все клетки в шахматном порядке (см. рисунок). Назовём числа белыми (чёрными), если они стоят на белых (чёрных) клетках. Заметим, что в исходном квадрате сумма белых чисел равна сумме чёрных. Прибавляя к числам, стоящим в соседних клетках, одно и то же число, мы одинаково изменяем сумму белых и сумму чёрных чисел. Поэтому равенство сумм не нарушится. Но во втором квадрате сумма белых чисел равна 0, а сумма чёрных равна 4. Поэтому такой квадрат не может получиться из исходного.



3. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

Решение: 19. Всего “знаний” предметов 8+7+11=26, но хотя бы 2+3+4=9 мы посчитали дважды, их надо вычесть. Однако, “всезнающих” мы сейчас вычли лишний раз. Их надо прибавить. Но, если их будет больше 2, то их придется и снова вычитать в посчитанных дважды, т.е. общая сумма не изменится. Тогда всего участников не более 26-9+2=19 человек.

4. Существуют ли различные натуральные числа $x, y, z,$ для которых $x + \text{НОД}(y, z) = y + \text{НОД}(z, x) = z + \text{НОД}(x, y)$?

Решение. Нет. Заметим, что НОД не больше меньшего из чисел, от которых он берется. Упорядочим числа так, что $x < y < z$. Пусть $\text{НОД}(y, z) = d$. Положим также $z = kd$, $\text{НОД}(x, y) = n$, $1 \le n \le x$. Тогда $x + d \ge kd + 1$. Тогда $x \ge (k - 1)d + 1$, однако y тоже делится на d, и лежит между $(k - 1)d + 1 \le x < y < z = kd$. Противоречие.

5. На доске записано число 2023^{2011}. Каждым ходом последняя цифра записанного на доске числа запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли после применения нескольких таких операций получится число 2011^{10}?

Решение. Пусть исходное число $10a + b$, тогда второе число $a + 5b$. Разность $5(10a + b) - (a + 5b) = 49a$ делится на 7, на 7 делится и исходное число. Следовательно, все числа рассматриваемого ряда делятся на 7, а число 2011 не делится.