Вступительная олимпиада 2023
Письменная часть. 6 класс

1. В чем заключается решение задачи с использованием принципа Дирихле?
2. Приведите пример числа, которое имеет остаток 3 при делении на 7, и остаток 12 при делении на 21. Если вы считаете, что такое невозможно - поясните почему.
3. В чем заключается метод решения “обратный ход”?
4. Что такое путь в графе? Что такое связный граф? Сколько ребер в полном графе? Что такое плоский граф?
5. Количество перестановок - количество способов выбрать k элементов из k без повторений и с учетом порядка. Объясните, что значат условия в этом предложении.
   Что такое сочетания с повторениями? Напишите формулу сочетания с повторениями и объясните, почему она такая.

Решите задачи:

1. Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?
2. Для того чтобы обменяться протоколами прошедших матбоёв, из «Берендеевых полян» и «Алых парусов» одновременно выехали два члена жюри. Известно, что один из них за 40 минут успел проехать половину пути и ещё 2 км, а другой за час не доехал 3 км до середины пути. Через какое время после выезда они встретились?

Найдите ошибку в решении:

1. В турнире по шашкам участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?

Решение. Пусть в турнире приняло участие x десятиклассников, которые заработали y очков. Тогда играли $10x$ одиннадцатиклассников, которые заработали $4.5y$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11x$ игроков играют $\frac{11x(11x-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение $11x(11x-1) = 5.5y$, откуда $y = 2x(11x-1)$. Заметим, что каждый участник играет $(11x-1)$ партий. Значит, каждый десятиклассник может набрать максимум $2(11x-1)$ очков, если выиграет все игры. Так как x десятиклассников набрали $2x(11x-1)$, они выиграли все свои игры. Т.к. у всех поровну очков, то самый успешный десятиклассник имеет результат $2(11x-1)$ очков.

Вступительная олимпиада 2023

Устная олимпиада. 6 класс

1. На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.
2. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рис. слева). Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, не обязательно положительное. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

3. В кружок робототехники берут только тех, кто знает программирование, математику или физику. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?
4. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 111-м месте?
5. На доске записано число 2023^{2011}. Каждым ходом последняя цифра записанного на доске числа запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли после применения нескольких таких операций получится число 2011^{10}?

Вступительная олимпиада 2023

Устная олимпиада. 6 класс

1. На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.
2. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рис. слева). Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, не обязательно положительное. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

3. В кружок робототехники берут только тех, кто знает программирование, математику или физику. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?
4. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 111-м месте?
5. На доске записано число 2023^{2011}. Каждым ходом последняя цифра записанного на доске числа запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли после применения нескольких таких операций получится число 2011^{10}?

Блиц

1. В магазине идёт акция: «4 пирожных по цене 3-х или 6 пирожных по цене 4- х.» Сколько пирожных купил Петя, если он заплатил за 11 пирожных (все пирожные он купил в рамках проводимой акции)?

16

2. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

$9000-5^4=8375$

3. В саду у Ани и Вити росло 2022 розовых куста. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

3

4. Отметьте на одной прямой четыре точки A, B, C, D так, чтобы расстояние между точками A и B было равно 10 см, между A и C – 3 см, между B и D – 5 см, а между D и C – 8 см.

C-3-A-5-D-5-B

5. Петя сбегает с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем мама едет на лифте. Мама едет на лифте с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Петя сбегает с пятого этажа на первый. За сколько секунд Петя сбегает с четвёртого этажа на первый? (Длины пролетов лестницы между всеми этажами одинаковы).

12 секунд

6. На числовой прямой закрашивают красным и синим цветом точки с целыми координатами по следующим правилам: а) точки, разность координат которых равна 7, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 20 и 14 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 71 и 143 — синим. Сколькими способами можно раскрасить все целые числа, соблюдая эти правила?

8

7. Если между цифрами некоторого двузначного числа вписать это же число, то полученное четырехзначное число будет больше первоначального в 77 раз. найдите это число.

Любое из 15, 23, 31, 38, 46, 54, 62, 69, 70, 77, 85, 93

8. Расставьте скобки в выражении 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5 так, чтобы оно стало верным.

2 : 3 : (4 : 5 : 6) = 5

9. У продавца есть 3 пачки наклеек по 100 штук в каждой. К нему подошли трое покупателей. Первому покупателю нужно 70 наклеек, а второму и третьему — по 60 наклеек. Как продавцу отсчитать каждому покупателю нужное число наклеек за 70 секунд, если за одну секунду он отсчитывает ровно одну наклейку?

10, 20 из одной пачки, 40 из другой. Комплекты 60 неотсчитанных из второй пачки, 40+20 отсчитанных и 100-10-20=70 неотсчитанных из первой.

10. Разбейте натуральные числа от 1 до 10 на пары так, чтобы разность чисел в каждой паре была равна 2 или 3.

10-7, 9-6, 8-5, 1-3, 2-4

Вступительная олимпиада 2023
Письменная часть. 6 класс. Разбор

1. Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?

Ответ. На 50%. **Решение. 1 способ.** Содержание лимонного сока в напитке после указания генерального директора снизилось в полтора раза. Значит, из тех же лимонов можно приготовить в полтора раза больше лимонного напитка. Иными словами, количество производимого лимонного напитка увеличится в полтора раза или на 50%.

2 способ. Пусть x – количество производимого напитка до указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – 0,15·x. Пусть теперь y – количество производимого напитка после указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – 0,1·y. Так как подразумевается, что количество лимонного сока не изменилось, получаем равенство 0,15·x = 0,1·y. Умножив обе части этого равенства на 10, получим: y = 1,5·x; или: y = x + 0,5·x. Значит, количество производимого напитка увеличилось на 50%.

2. Для того чтобы обменяться протоколами прошедших матбоёв, из «Берендеевых полян» и «Алых парусов» одновременно выехали два члена жюри. Известно, что один из них за 40 минут успел проехать половину пути и ещё 2 км, а другой за час не доехал 3 км до середины пути. Через какое время после выезда они встретились?

Решение: Быстрый за час проедет ¾ пути и 3 км. Обозначим четверть пути за x. Тогда быстрый за час проезжает 3x+3, а медленный - 2x-3, т.е. суммарное расстояние есть 5x. Тогда весь путь (4x) они проедут за 60/5*4=48 минут.

1. В турнире по шашкам участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?

Ответ. 20. **Решение.**

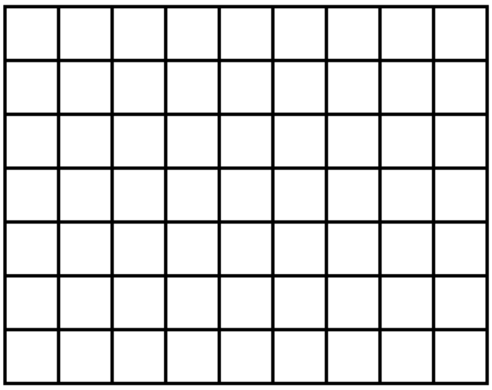
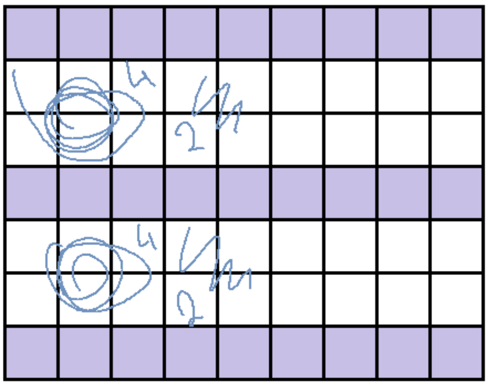
1. Пусть в турнире приняло участие x десятиклассников, которые заработали y очков. Тогда играли $10x$ одиннадцатиклассников, которые заработали $4.5y$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11x$ игроков играют $\frac{11x(11x-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение $11x(11x-1) = 5.5y$, откуда $y = 2x(11x-1)$.

2. Заметим, что каждый участник играет $(11x-1)$ партий. Значит, каждый десятиклассник может набрать максимум $2(11x-1)$ очков, если выиграет все игры. Так как x десятиклассников набрали $2x(11x-1)$, они выиграли все свои игры.

3. Если в турнире участвовало хотя бы два десятиклассника, то в игре между собой один из них не выиграл. Это невозможно. Значит, был только один десятиклассник, т. е. $x = 1$. Он набрал $2(11-1) = 20$ очков.

Устная часть

1. На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.

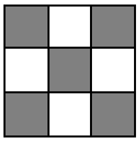
Решение: Нельзя. Заметим, что из-за 3x3 в фиолетовых линиях не может стоять ничего. Рассмотрим “центральный” квадрат 5x5 - в нем должно стоять хотя бы 12 крестиков, а значит пустых будет не более 13.

2. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рис. слева). Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, не обязательно положительное. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

Решение: Раскрасим все клетки в шахматном порядке (см. рисунок). Назовём числа белыми (чёрными), если они стоят на белых (чёрных) клетках. Заметим, что в исходном квадрате сумма белых чисел равна сумме чёрных. Прибавляя к числам, стоящим в соседних клетках, одно и то же число, мы одинаково изменяем сумму белых и сумму чёрных чисел. Поэтому равенство сумм не нарушится. Но во втором квадрате сумма белых чисел равна 0, а сумма чёрных равна 4. Поэтому такой квадрат не может получиться из исходного.



3. В кружок робототехники берут только тех, кто знает программирование, математику или физику. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

Решение: 19. Всего “знаний” предметов 8+7+11=26, но хотя бы 2+3+4=9 мы посчитали дважды, их надо вычесть. Однако, “всезнающих” мы сейчас вычли лишний раз. Их надо прибавить. Но, если их будет больше 2, то их придется и снова вычитать в посчитанных дважды, т.е. общая сумма не изменится. Тогда всего участников не более 26-9+2=19 человек.

4. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 111-м месте?

Решение: Путем некоторых страданий узнаем, что оно пятизначное.

5						
50	14, 41	23, 32				
500	140, 104, 410, 401	230, 320, 203, 302	113, 131, 311	122, 212, 221		
5000	1400, 1040, 1004, 4001, 4100, 4010	2300, 2003, 2030, 3200, 3002, 3020	1130, 1103, 1013, 9 штук	9 штук	1112, 1121, 1211, 2111	
						11111

1+5+15+35=56

Посчитаем по столбцам. До 4 знаков: $4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 = 56$. Надо же, сошлось.

Значит первое пятизначное будет 57ым. Зафиксируем первую 1, остальное до суммы 4 (4, 1+3, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1): $4 + 4 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot 3 + 1 = 35$. Тогда первое 2____ будет 57+35=92ым.

20___ (3, 1+2, 1+1+1): $3 + 3 \cdot 2 + 1 = 10$. 21___ будет 102ым.

21___ (2, 1+1): $3 + 3 = 6$.

22___ (1): 3

23000 - 111 число.

5. На доске записано число 2023^{2011}. Каждым ходом последняя цифра записанного на доске числа запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли после применения нескольких таких операций получится число 2011^{10}?

Решение. Пусть исходное число $10a + b$, тогда второе число $a + 5b$. Разность $5(10a + b) - (a + 5b) = 49a$ делится на 7, на 7 делится и исходное число. Следовательно, все числа рассматриваемого ряда делятся на 7, а число 2011 не делится.