

## Вступительная олимпиада 2023

### Письменная часть. 5 класс

1. В чем заключается решение задачи с использованием принципа Дирихле?
2. Назовите признаки делимости на 9, 8, 75. Докажите один на свой выбор.
3. В чем заключается метод решения “обратный ход”?
4. Что такое двудольные графы? Что такое дерево? Что такое путь? Сколько ребер в полном графе?
5. Количество размещений - количество способов выбрать  $k$  элементов из  $n$  без повторений с учетом порядка. Объясните, что значат условия в этом предложении. Напишите формулу количества размещений и объясните, почему она такая.
6. В каждом пункте распишите стратегию выигрывающего игрока:
  - a. На доске  $5 \times 5$  двое поочередно отмечают клетки так, чтобы отмечаемая клетка не касалась даже в точке только что отмеченной. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
  - b. В левой клетке полоски  $1 \times 25$  стоит фишка. Двое по очереди двигают ее на 2 или 4 клетки вправо. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

#### Решите задачи:

1. Макс и Крис ловили рыбу. Вместе они поймали 25 рыб. Если бы Макс поймал рыб на треть больше, а Крис – в 2 раза меньше, то количество рыб, пойманных ими вместе, не изменилось бы. Сколько рыб поймал каждый из мальчиков?
2. Как отмерить 8 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? (8 л воды должно получиться в одном ведре).
3. Саша, Лёша и Коля одновременно стартовали в забеге на 100 м. Когда Саша финишировал, Лёша находился в десяти метрах позади него, а когда финишировал Лёша — Коля находился позади него в десяти метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Саша и Коля, когда Саша финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

#### Найдите ошибку в решении.

1. Лёня буквами Е, Ё, Л, Н, С и Я заменил шесть различных цифр. Он посчитал, что суммы цифр слов ЛЁН, ЛЕС и СЕНЯ равны 3, 19 и 25 соответственно. Не ошибся ли Лёня?

**Решение:** Т.к.  $Л+Ё+Н=3$ , то это цифры 0, 1 и 2 в каком-то порядке. Л не может быть 0, т.к. числа с 0 не начинаются, Л не может быть 1, т.к.  $1+9+8=18$ , т.е. для 19 суммы не хватит. Значит  $Л=2$ .  $Е+С=17$ , значит  $Н+Я=6$ . Но 6 можно набрать только как  $0+6$ ,  $1+5$ ,  $2+4$ ,  $3+3$ . Но цифры 0, 1, 2 заняты, а в случае двух “3”  $Н=Я$ , чего быть не может. Значит ошибся.

## Вступительная олимпиада 2023

### Устная часть. 5 класс

1. Имеется достаточное количество единичных кубиков, причем некоторые кубики прозрачны, некоторые нет. Из них требуется сложить куб с ребром 5. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на кубик со стороны любой из граней куб казался непрозрачным?
2. Три золотоискателя нашли 10 самородков общим весом 400 г. Они рассчитывали разделить находку так, чтобы каждому досталось не менее 100 г золота, однако после того, как один из самородков весом 60 г пришлось отдать за продовольствие, такой раздел стал невозможен. Мог ли он быть возможен вначале или золотоискатели заведомо ошибались?
3. Четыре друга: Андрей, Женя, Толя и Федя - играли в теннис пара на пару. После каждой партии они разбивались на пары заново. Известно, что Женя выиграл 27 раз, Андрей - 14 раз, Толя - 7 раз, а Федя - меньше всех. Сколько партий выиграл Федя?
4. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 20. Найдите сумму примечательных чисел, не превосходящих 1000.
5. В водоёме плавали 2007 акул и 2007 щук. Акула может съесть щуку, если та до этого съела чётное число акул. Щука может съесть акулу, если та до этого съела нечётное число щук. Каждая съеденная рыба мгновенно переваривается. Акулы не едят акул, а щуки – щук. Могло ли так случиться, что в водоёме осталась только одна рыба, и если да, то какая?

## Вступительная олимпиада 2023

### Устная часть. 5 класс

1. Имеется достаточное количество единичных кубиков, причем некоторые кубики прозрачны, некоторые нет. Из них требуется сложить куб с ребром 5. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на кубик со стороны любой из граней куб казался непрозрачным?
2. Три золотоискателя нашли 10 самородков общим весом 400 г. Они рассчитывали разделить находку так, чтобы каждому досталось не менее 100 г золота, однако после того, как один из самородков весом 60 г пришлось отдать за продовольствие, такой раздел стал невозможен. Мог ли он быть возможен вначале или золотоискатели заведомо ошибались?
3. Четыре друга: Андрей, Женя, Толя и Федя - играли в теннис пара на пару. После каждой партии они разбивались на пары заново. Известно, что Женя выиграл 27 раз, Андрей - 14 раз, Толя - 7 раз, а Федя - меньше всех. Сколько партий выиграл Федя?
4. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 20. Найдите сумму примечательных чисел, не превосходящих 1000.
5. В водоёме плавали 2007 акул и 2007 щук. Акула может съесть щуку, если та до этого съела чётное число акул. Щука может съесть акулу, если та до этого съела нечётное число щук. Каждая съеденная рыба мгновенно переваривается. Акулы не едят акул, а щуки – щук. Могло ли так случиться, что в водоёме осталась только одна рыба, и если да, то какая?

**Вступительная олимпиада 2023**  
**5 класс. Разбор. Письменная часть.**

**Решите задачи:**

1. Макс и Крис ловили рыбу. Вместе они поймали 25 рыб. Если бы Макс поймал рыб на треть больше, а Крис – в 2 раза меньше, то количество рыб, пойманных ими вместе, не изменилось бы. Сколько рыб поймал каждый из мальчиков?

**Ответ:** Макс поймал 15 рыб, а Крис – 10 рыб. **Решение.** Треть рыб, пойманных Максом, равна половине рыб, пойманных Крисом. Значит, все пойманные рыбы составляют 5 равных долей, три из которых приходятся на долю Макса и две – на долю Криса. Одна доля равна 5 рыбам. Следовательно, Макс поймал  $5 \times 3 = 15$  рыб, а Крис поймал  $5 \times 2 = 10$  рыб.

2. Как отмерить 8 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? (8 л воды должно получиться в одном ведре).

*Решение. Запишем в виде таблицы последовательность наполнения ведер:*

	Ведро вместимостью 10 л	Ведро вместимостью 6 л	Комментарий
Сначала	0 л	0 л	
1 шаг	10 л	0 л	Первое ведро наполнили из реки
2 шаг	4 л	6 л	Перелили из первого ведра во второе до его наполнения
3 шаг	4 л	0 л	Вылили из второго в реку
4 шаг	0 л	4 л	Перелили из первого ведра во второе
5 шаг	10 л	4 л	Первое ведро наполнили из реки
6 шаг	8 л	6 л	Перелили из первого ведра во второе до его наполнения

3. Саша, Лёша и Коля одновременно стартовали в забеге на 100 м. Когда Саша финишировал, Лёша находился в десяти метрах позади него, а когда финишировал Лёша — Коля находился позади него в десяти метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Саша и Коля, когда Саша финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

**Ответ.** 19 м. **Решение.** Скорость Коли составляет 0,9 от скорости Лёши. В момент, когда Саша финишировал, Лёша пробежал 90 м, а Коля  $0,9 \times 90 = 81$  м. Следовательно, расстояние между Сашей и Колей было 19 м.

**Найдите ошибку в решении.**

1. Лёня буквами Е, Ё, Л, Н, С и Я заменил шесть различных цифр. Он посчитал, что суммы цифр слов ЛЁН, ЛЕС и СЕНЯ равны 3, 19 и 25 соответственно. Не ошибся ли Лёня?

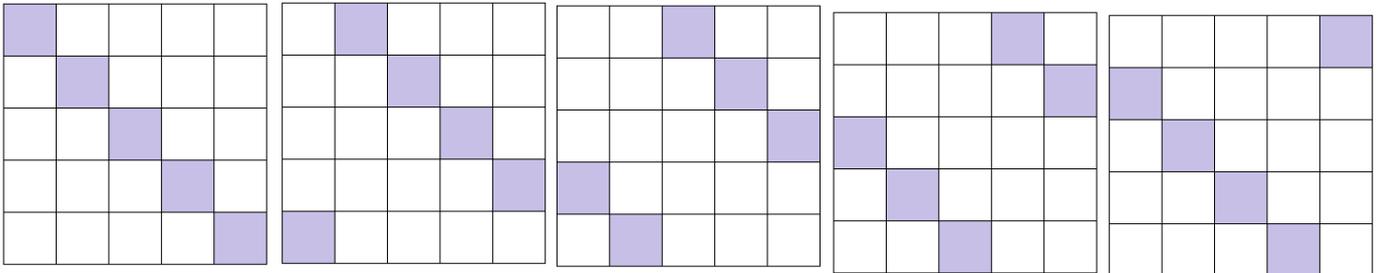
**Решение:** Т.к.  $Л + Ё + Н = 3$ , то это цифры 0, 1 и 2 в каком-то порядке. Л не может быть 0, т.к. числа с 0 не начинаются, Л не может быть 1, т.к.  $1 + 9 + 8 = 18$ , т.е. для 19 суммы не хватит. Значит  $Л = 2$ .  $Е + С = 17$ , значит  $Н + Я = 6$ . Но 6 можно набрать только как  $0 + 6$ ,  $1 + 5$ ,  $2 + 4$ ,  $3 + 3$ . Но цифры 0, 1, 2 заняты, а в случае двух “3”  $Н = Я$ , чего быть не может. Значит ошибся.

### Устная часть.

1. Имеется достаточное количество единичных кубиков, причем некоторые кубики прозрачны, некоторые нет. Из них требуется сложить куб с ребром 5. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на кубик со стороны любой из граней куб казался непрозрачным?

**Оценка:** с одной стороны видно 25, значит нужно хотя бы 25.

**Пример:** Это сложно, не смотрите так. Послойно:



2. Три золотоискателя нашли 10 самородков общим весом 400 г. Они рассчитывали разделить находку так, чтобы каждому досталось не менее 100 г золота, однако после того, как один из самородков весом 60 г пришлось отдать за продовольствие, такой раздел стал невозможен. Могли ли они быть возможны вначале или золотоискатели заведомо ошибались?

**Решение:** Мог. 8 самородков по 41г, 1 в 12г и 1 в 60г -  $41+41+41=123$  г, такой же набор, и все остальное. Сейчас нельзя, потому что каждому нужно взять хотя бы 3 самородка, их всего 9, значит ровно по 3, но тогда у кого-то  $41+41+12=94$ .

3. Четыре друга: Андрей, Женя, Толя и Федя - играли в теннис пара на пару. После каждой партии они разбивались на пары заново. Известно, что Женя выиграл 27 раз, Андрей - 14 раз, Толя - 7 раз, а Федя - меньше всех. Сколько партий выиграл Федя?

**Решение:**

**180.** Ответ: Федя а) выиграл 6 партий; б) проиграл 21 партию.

Заметим, что количество партий равно половине количества побед всех четырех друзей (в каждой партии — два победителя).

Следовательно, можно утверждать, что партий было не меньше 27 (столько раз выиграл Женя), а всего индивидуальных побед — не меньше 54.

Но общее количество индивидуальных побед Жени, Андрея и Толи равно 48 — шести побед не хватает.

Следовательно, Федя выиграл не менее 6 партий. Но так как он выиграл партий меньше всех, он выиграл ровно 6 партий.

Таким образом, всего индивидуальных побед было  $48 + 6 = 54$ , а партий сыграно 27. Так как Федя 6 партий выиграл, 21 партию он проиграл.

4. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 20. Найдите сумму примечательных чисел, не превосходящих 1000.

**Ответ:** 26 640.

Сумма двузначных чисел не более  $9+9=18$ . Значит нас интересуют только трехзначные числа.

$$299+929+992=20*100+20*10+20=2220$$

488, 677, 866 - аналогично.

$$398+389+893+839+983+938=20*2*100+20*2*10+20*2=4440$$

497, 596, 587 - аналогично.

$$4*(2220+4440)=26\ 640$$

5. В водоёме плавали 2007 акул и 2007 щук. Акула может съесть щуку, если та до этого съела чётное число акул. Щука может съесть акулу, если та до этого съела нечётное число щук. Каждая съеденная рыба мгновенно переваривается. Акулы не едят акул, а щуки – щук. Могло ли так случиться, что в водоёме осталась только одна рыба, и если да, то какая?

**Решение:** Чтобы акулу стало можно съесть, она должна съесть хотя бы 1 щуку. Т.к. акул и щук поровну, то остаться может только акула. Например 2006 акул съедят по 1 щуке, 2007ая щука съест все 2006 акул, 2007 акула съест 2007ую щуку.