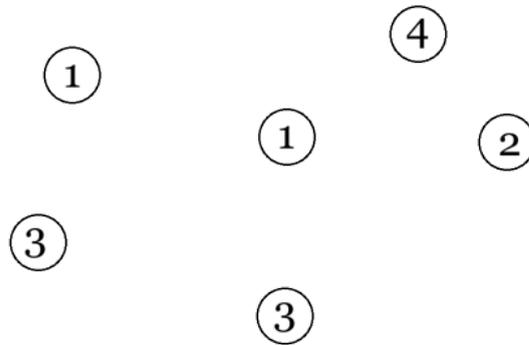


Вступительная олимпиада 2023

Письменная часть

4 класс

1. Постройте отрицания к следующим утверждениям:
 - а. Я вдвое старше брата и втрое старше сестры.
 - б. Точки А и В покрашены в красный цвет.
 - в. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежат одному хозяину.
2. Приведите пример числа, которое имеет остаток 3 при делении на 5, и остаток 7 при делении на 10. Если вы считаете, что такое невозможно - поясните почему.
3. Разложите число 49266 на простые множители.
4. Что такое количество сочетаний? Обозначение, формула, определение.
5. Что такое путь в графе? Сколько различных по составу циклов можно выделить в полнографе на 4 вершинах?
6. Известны степени вершин. Постройте граф.



7. В каждом пункте распишите стратегию выигрывающего игрока:
 - а. На столе лежат 15 спичек, за ход можно брать от 1 до 3. Играют двое. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
 - б. На столе лежат две кучки - по 7 и 16 спичек. За ход можно брать любое количество спичек, но только из одной кучки. Играют двое. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Решите задачи:

1. В двух аквариумах вместе 100 рыбок. Когда из первого аквариума отселили 30 рыбок, а из второго 40, то в аквариумах осталось поровну рыбок. Сколько рыбок было в каждом аквариуме первоначально?
2. Три прыжка двухголового дракона равны 5 прыжкам трёхголового. Но за то время, когда двухголовый дракон делает 4 прыжка, трёхголовый делает 7 прыжков. Кто из них бежит быстрее?
3. Разрежьте квадрат со стороной 4 на прямоугольника, сумма периметров которых равна 25.

Найдите ошибку в решении.

1. Найдите все трёхзначные числа, у которых сумма цифр в 11 раз меньше самого числа.

Решение: Сумма цифр трехзначного числа не превосходит $9+9+9=27$, а значит искомое число не превосходит $27 \times 11 = 297$. Тогда сумма цифр искомого числа не больше $2+9+7=18$, т.е. число не больше $18 \times 11 = 198$. Проверим все варианты: $9 \times 11 = 99$ - мало, $10 \times 11 = 110$ (сумма не та), $11 \times 11 = 121$ (сумма не та), $12 \times 11 = 132$ (сумма не та), $13 \times 11 = 143$ (сумма не та), $14 \times 11 = 154$ (сумма не та), $15 \times 11 = 165$ (сумма не та), $16 \times 11 = 176$ (сумма не та), $17 \times 11 = 187$ (сумма не та), $18 \times 11 = 198$ (сумма не та). Дальше можно не проверять, значит таких чисел нет.

Вступительная олимпиада 2023

Устная часть. 4 класс

1. Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает найти десять различных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых совпадает с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать?
2. Имеется достаточное количество единичных кубиков, причем некоторые кубики прозрачны, некоторые нет. Из них требуется сложить куб с ребром 3. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на кубик со стороны любой из граней куб казался непрозрачным?
3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?
4. Между населенными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяженность которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G .

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

5. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

Вступительная олимпиада 2023

Устная часть. 4 класс

1. Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает найти десять различных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых совпадает с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать?
2. Имеется достаточное количество единичных кубиков, причем некоторые кубики прозрачны, некоторые нет. Из них требуется сложить куб с ребром 3. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на кубик со стороны любой из граней куб казался непрозрачным?
3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?
4. Между населенными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяженность которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G .

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

5. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

Вступительная олимпиада 2023

Устная часть. 4 класс. Разбор

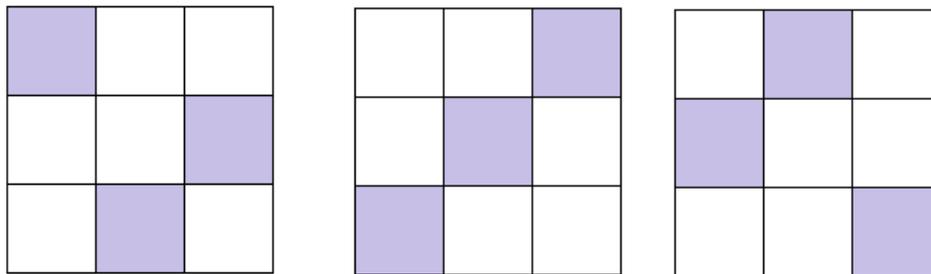
1. Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает найти десять различных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых совпадает с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать?

Решение: Нет. Каждое число делится на общий НОД, а значит каждое его не меньше. Тогда среднее арифметическое этих чисел не меньше НОДа, а равно ему только в случае равных чисел

2. Имеется достаточное количество единичных кубиков, причем некоторые кубики прозрачны, некоторые нет. Из них требуется сложить куб с ребром 3. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на кубик со стороны любой из граней куб казался непрозрачным?

Оценка: с одной стороны видно 9, значит нужно хотя бы 9.

Пример: Это сложно, не смотрите так. Послойно:

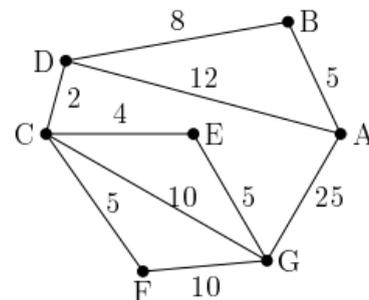


3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?

Ответ: 6 часов. **Решение:** Участок пути от места встречи до середины пути мальчик проходит за час, а девочка за два часа, значит, скорость мальчика в два раза больше. Если до встречи они шли $2x$ часов, то после встречи мальчик ещё пройдет x часов. Весь путь он пройдет за $3x$, а половину – за $1,5x$. Таким образом, участок от середины пути до места встречи мальчик проходит за $0,5x$, что равно 1 часу. Отсюда $x = 2$ часа, а полное время 6 часов.

4. Между населенными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяженность которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G .

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	



Решение. Для наглядности изобразим граф в виде рисунка (см. рис. 5). Сразу видно, что есть путь из А в G из одного ребра длины 25. Поищем более короткие пути. Поскольку длины всех рёбер положительны, то кратчайший путь не может содержать циклов. Кратчайший путь из А в В имеет длину 5 (это одно ребро), так как любое другое выходящее из А ребро имеет большую длину. Кратчайший путь из А в D имеет длину 12 (тоже одно ребро), так как единственный альтернативный путь $A \rightarrow B \rightarrow D$ имеет длину 13. Поэтому кратчайший путь из А в С имеет длину 14 ($A \rightarrow D \rightarrow C$). Из С в G ведут три пути (без циклов): путь $C \rightarrow E \rightarrow G$ длины 9, путь $C \rightarrow G$ длины 10 и путь $C \rightarrow F \rightarrow G$ длины 15. Кратчайший из них имеет длину 9. Поэтому длина кратчайшего «обходного» пути из А в G равна $14 + 9 = 23 < 25$. Значит, кратчайший путь из А в G имеет длину 23.

Ответ: 23.

5. Из последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

Ответ: 2063. $40 \cdot 40 = 1600$. Т.е. число больше $2018 + 40 = 2058$. $50 \cdot 50 = 2500$, т.е. число меньше $2018 + 50 = 2068$. $45 \cdot 45 = 2025$, $46 \cdot 46 = 2116$. Т.е. 45 чисел точно уберут, а 46 точно нет. $2018 + 45 = 2063$.