

Вступительная олимпиада 2022

Письменная часть. 7 класс

1. Что является решением для задач вида “инвариант”? Как строится решение подобных задач?
2. Что такое выигрышная стратегия в задачах-играх?
3. Что такое дерево? Что такое двудольный граф? Критерий двудольности (с доказательством).
4. Количество сочетаний - количество способов выбрать k элементов из n без повторений и учета порядка. Объясните, что значат условия в этом предложении.
Что такое размещения с повторениями? Напишите формулу размещения с повторениями и объясните, почему она такая.
5. Сформулируйте малую теорему Ферма.
6. Что такое равнобедренный треугольник? Какие свойства равнобедренного треугольника вы знаете?
- 7.a. Выпишите 10 делителей числа 183645822209124.
- 7.b. Вычеркните из этого числа 9 цифр, чтобы оно делилось на 5 и было максимальным.

Упростите выражение:

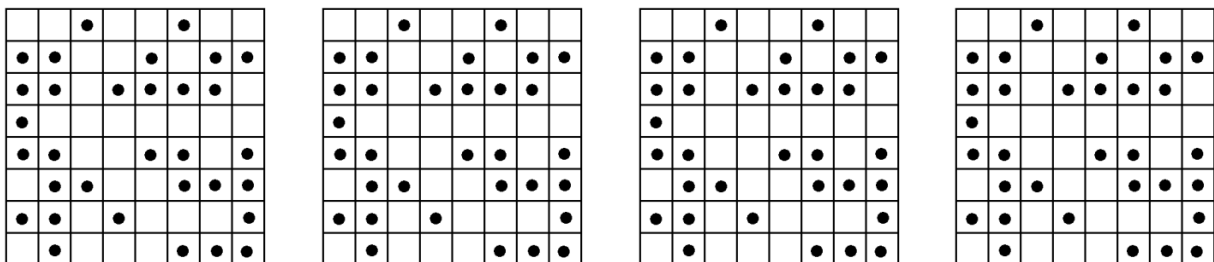
1. $7x \cdot (21x - 13y) - 4y \cdot (7x - 9)$
2. $(3x - 5y)^2 - (4y - x) \cdot (x + 2)$

Решите системы уравнений:

1.
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} -x + y = 5x + 7 - 2y \\ 3x + y = (6y - 3)x \end{cases}$$

Решите задачи:

1. У крестьянина были коза, корова, кобыла, а еще стог сена и сын. Сын подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу 1 месяц, или козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, или же корову и кобылу $\frac{1}{4}$ месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Объясните, почему он был вправе так сказать.
2. Разбейте заданную таблицу на четырехклеточные уголки в виде буквы «Г» так, чтобы в каждом уголке было ровно два кружка.



Найдите ошибку в решении:

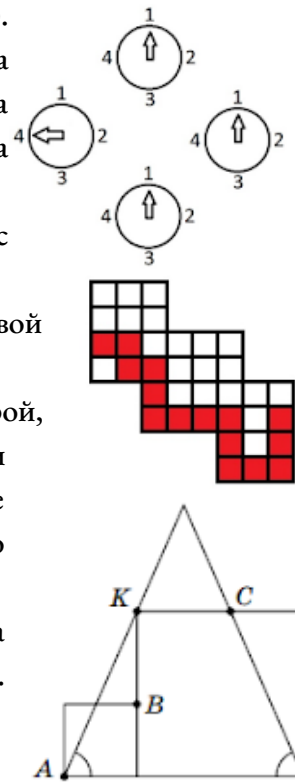
1. На доске написаны натуральные числа от 1 до 27. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу, пока не останется два числа. Если их сумма кратна 5, то выигрывает первый игрок, иначе – второй. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: второй. Посмотрим на остатки данных чисел при делении на 5. Есть по 5 чисел с остатками 0, 3 и 4 и по 6 чисел с остатками 1 и 2. Если вычеркнуть все числа с остатками 3 и 4 и все, кроме одного, числа с остатками 0 (назовём их плохими), то сумма двух последних оставшихся не будет делиться на 5. Заметим, что первый игрок вычёркивает 13 чисел, а второй – 12. Даже вычеркнув все числа с остатком 1 и 2, первый игрок вычеркнет только 12 чисел. Значит, он «поможет» второму вычеркнуть хотя бы одно плохое число. Кроме того, если он поможет второму всего один раз, то вычеркнет все числа с остатками 1 и 2, а какую-то их этих групп (скажем, с остатком 2) вычеркнет не последним ходом. Тогда второй может не вычёркивать последнее число с остатком $5-2=3$, и ему как раз хватит ходов, чтобы вычеркнуть всё остальное из намеченного.

Вступительная олимпиада 2022

Устная часть. 7 класс.

1. По кругу установлены четыре тумблера на четыре положения (см. рисунок). Три из них установлены в положение “1”, а четвертый — в положение “4”. За один ход можно повернуть либо по часовой стрелке на одно деление два соседних тумблера, либо против часовой стрелки на одно деление два противоположных. Можно ли установить все тумблеры в положение “3”?
2. Каких чисел среди первых 100000 натуральных больше: с суммой цифр 19 или с суммой цифр 26?
3. Разрежьте фигуру (см. рисунок) на шесть фигур одинаковой формы и одинаковой площади так, чтобы каждая содержала разное число закрашенных клеток.
4. Имеется полоска из 100 клеток. На ней стоит 50 фишек: по одной на второй, четвертой,..., сотой слева клетках. За один ход Петя выбирает 2 фишки и сдвигает обе эти фишки на одну клетку влево (но только если никакие две фишки при этом не попадут в одну клетку). Какое наибольшее количество ходов может сделать Петя?
5. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина К большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки А, В и С лежат на одной прямой.



Вступительная олимпиада 2022

Устная часть. 7 класс.

1. По кругу установлены четыре тумблера на четыре положения (см. рисунок). Три из них установлены в положение “1”, а четвертый — в положение “4”. За один ход можно повернуть либо по часовой стрелке на одно деление два соседних тумблера, либо против часовой стрелки на одно деление два противоположных. Можно ли установить все тумблеры в положение “3”?
2. Каких чисел среди первых 100000 натуральных больше: с суммой цифр 19 или с суммой цифр 26?
3. Разрежьте фигуру (см. рисунок) на шесть фигур одинаковой формы и одинаковой площади так, чтобы каждая содержала разное число закрашенных клеток.
4. Имеется полоска из 100 клеток. На ней стоит 50 фишек: по одной на второй, четвертой,..., сотой слева клетках. За один ход Петя выбирает 2 фишки и сдвигает обе эти фишки на одну клетку влево (но только если никакие две фишки при этом не попадут в одну клетку). Какое наибольшее количество ходов может сделать Петя?
5. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина К большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки А, В и С лежат на одной прямой.

